LOGIKA BOOL'A

Logika Bool'a (symboliczna) to logika, do jakiej zdążyliśmy się przyzwyczaić na lekcjach matematyki w szkole średniej. Jej historia sięga roku 1847, kiedy George Bool pierwszy raz zastosował w logice zbiór symboli pozwalających na działania podobne do tych znanych z arytmetyki. Przez dziesięciolecia była niedoceniana, jej zastosowania zostały "odkryte" na nowo wraz z rozwojem pierwszych komputerów. System logiczny Bool'a bazuje na arytmetyce binarnej, ma jasno określone "sztywne" wartości (ang. *crisp extremes*): tak-nie, prawda-fałsz, 1-0. Wartości te zwane są również progami lub poziomami decyzji. Rozszerzeniem logiki Bool'a jest logika wielowartościowa, w której mamy do czynienia z kilkoma sztywnymi progami, np: 0-0.5-1. Przykładem jest logika trzywartościowa, której autorem jest polski matematyk Jan Łukaszewicz. Chociaż takich progów może być dużo, nadal są to wartości ściśle zdefiniowane i nie jesteśmy w stanie określić poziomów "pomiędzy". Są to ograniczenia logiki sztywnej (ang. *crisp logic*), których nie ma logika rozmyta.

LOGIKA ROZMYTA

Logika rozmyta (ang. *fuzzy logic*) została stworzona i zaprezentowana w 1965 roku przez profesora Lotfi Zadeh'a z University of California w Berkeley.

Zasadniczą różnicą w stosunku do logiki sztywnej jest istnienie **stopni prawdy** (ang. *degrees of truth*), czyli stanów, dla których niektóre dane wejściowe są tylko częściowo prawdziwe. Bywa tak, że jedno "wejście" jest zarówno prawdziwe jak i fałszywe (w pewnych stopniach). Logika rozmyta, podobnie jak logika Bool'a, stała się matematycznym odzwierciedleniem instrukcji językowych (ang. *linguistic statements)*. Jednak w przypadku tej drugiej instrukcje te są bliższe realnym, tzn bardzo często są niejasne i mało konkretne.

Aby lepiej to ukazać posłużę się przykładem, który w opracowaniach poświęconych logice rozmytej występuje równie często, jak słynne "Hello World!". Przyjmijmy, że osobę mająca 190cm wzrostu uważamy za wysoką, 175 cm za średnio wysoką, a 155 za niską. Co wobec tego można powiedzieć o osobie mającej 165 cm? Jest już średnio wysoka, czy może jeszcze niska? Dla kogoś o wzroście 190 cm z pewnością jest niska, natomiast dla osób z trzeciej grupy jest "raczej wysoka". Język mnoży się od takich nieścisłości, których interpretacja zależy od konkretnej sytuacji. Ponieważ logika rozmyta ma być odzwierciedleniem instrukcji językowych, nie może zawierać ściśle określonych progów.

Logika rozmyta jest nadzbiorem logiki sztywnej.

ZBIORY I FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI

Rozważmy zbiór A wszystkich liczb między 5 i 10:

$$A = \{x \in R \mid 5 < x < 10\}$$

i funkcję odwzorowującą zbiór liczb rzeczywistych na zbiór dwuelementowy (m : R -> {0, 1}) daną wzorem:

$$f = \begin{cases} 1 <= 5<x<10 \\ 0 <= x\varepsilon(5, 10) \end{cases}$$

Funkcja ta nazywa się **funkcją przynależności** lub **funkcją charakterystyczną**. Łatwo można zauważyć powiązanie m z logiką Bool'a. m przyjmuje wartość 1 (prawda), jeśli x należy do zbioru

A oraz wartość 0 (fałsz) w przeciwnym razie.

Rozważmy teraz zbiór B taki, że B = {x e R | x jest bliskie 8}. Ponieważ wyrażenie "bliskie 8" nie jest precyzyjne (jest rozmyte), nie istnieje jednoznaczna funkcja przynależności. Można jednak stworzyć taką funkcję m, biorąc pod uwagę następujące wymagania:

1. m(8) = 1
2. im |x| jest bliższy 8, tym bardziej m(x) zbliża się do zera
3. |8 - x1| = |x2 - 8| ⇔ m(x1) = m(x2).

Łatwo zauważyć, że istnieje nieskończona ilość takich funkcji.

ZBIÓR ROZMYTY

Zbiór rozmyty F z uniwersum X jest zdefiniowany jako odwzorowanie m : X -> [0, α]. Jeśli α = 1, mówimy o **normalnej logice rozmytej**. Zbiór F może być definiowany przez zbiór krotek podwójnych (par uporządkowanych):

$$F = \{(x, m(x)) \mid x \in X\}$$

gdzie m jest funkcją przynależności odwzorowującą X w **przestrzeń przynależności** M, a m(x) jest stopniem prawdy. Jeżeli przestrzeń przynależności M zawiera tylko wartości 0 i 1, to zbiór F nie jest rozmyty, a m jest jego funkcją charakterystyczną. Dlatego logika dwuwartościowa jest podzbiorem logiki rozmytej.

ARYTMETYKA LOGIKI ROZMYTEJ

W logice Bool'a wyniki wyrażeń AND, OR i NOT są dobrze znane i zawsze takie same (Tab. 1).

a	*b*	*AND*	*OR*
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Tab. 1 Wartości AND, OR w logice Bool'a

Jaką wartość będzie miało natomiast wyrażenie AND dla dwóch danych wejściowych, z których każda może być prawdziwa w innym stopniu? Tego nie wiemy. Dlatego w logice rozmytej stosuje się zasadę min-max [4]. AND jest definiowane jako *min(x1, x2, ..)*, OR jako *max(x1, x2, ...)*, a NOT jako *1 – x*.

a	*b*	*AND*	*OR*
x_1	x_2	$\min(x_1, x_2)$	$\max(x_1, x_2)$

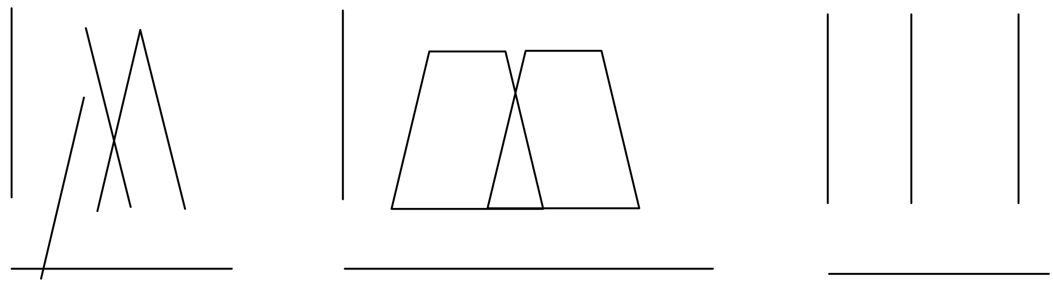
Tab. 2 Wartości AND, OR w logice rozmytej

W przypadku „klasycznych” danych wejściowych (0 lub 1) mamy oczywiście do czynienia z normalnymi operatorami AND i OR.

FUZYFIKACJA

Rozmycie (ang. *fuzzification)* to proces polegający na przekształceniu sztywnych danych wejściowych na dane rozmyte, używając wcześniej ustalonych funkcji przynależności. Posiłkując się przykładem ze wzrostem ludzi, wartość powyżej 190 cm zostanie przekształcone w „wysoki”.

Pierwszym etapem rozmycia jest przypisanie wszystkim sztywnym wartościom ze zbioru wejściowego odpowiadających im etykiet rozmytych (*fuzzy labels).* W przeciwieństwie do logiki klasycznej, etykiety te nie określają wartości krańcowych a raczej obszary, gdzie dane wejściowe stopniowo zmieniają się od bardzo pasujących do zupełnie niepasujących. Z tego względu wyróżniamy 3 kształty wykresów funkcji przynależności:



Trójkątny Trapezoidalny Singleton

Rys. 1 Rodzaje wykresów funkcji przynależności

Funkcje o wykresach trójkątnych i trapezoidalnych są używane najczęściej, ponieważ są one określane bardzo prostymi równaniami i dobrze odzwierciedlają stopnie przynależności. Singeltony natomiast są zazwyczaj używane do opisywania danych wyjściowych (po defuzyfikacji). Na wszystkich wykresach oś Y opisuje poziom przynależności, a oś X jest skalą dla danych wejściowych. Jak widać na wykresach trójkątnym i trapezoidalnym, dane wejściowe mogą należeć do więcej niż jednego zbioru rozmytego. W przykładzie ze wzrostem wartość 185cm byłaby „trochę średnia, ale jeszcze nie całkiem wysoka”.

STOSOWANIE REGUŁ

Po rozmyciu danych wejściowych w systemach bazujących na logice rozmytej stosuje się zasady „JEŚLI – TO” (*IF …THEN*), np. JEŚLI wartość = 180cm TO wzrost = średni. Łatwo zauważyć, że zasady te nie uformują prostego systemu zależności, ponieważ ich stosowanie również uwzględnia funkcje przynależności, które nie są funkcjami liniowymi. Ponownie, jedna wartość może być sklasyfikowana jako „częściowo ŚREDNIA, ale jeszcze nie całkiem WYSOKA”. Po zastosowaniu reguł do wszystkich danych ze zbioru wejściowego, rozmyte zbiory są sumowane, dając w ten sposób **zbiór wynikowy wnioskowania rozmytego**.

DEFUZYFIKACJA

Defuzyfikacja to proces polegając na przekształceniu wynikowego zbioru rozmytego powstałego w procesie stosowania reguł z powrotem na zbiór liczb rzeczywistych. Do tego celu stosuje się najczęściej jedną z następujących dwóch metod:

- metoda środka ciężkości
- metoda największej wartości funkcji przynależności